FREIBURGER INTERVALL-BERICHTE

81 / 4

N. Dimitrova, S. Markov:

Über die Intervallarithmetische Berechnung des Wertebereichs einer Funktion mit Anwendungen

Li-Qun Qi:

An Interval Test Using the New Krawczyk Operator

J. Rokne:

Optimal Computation of the Bernstein Algorithm for the Bound of an Interval Polynomial

G. Schröder:

Zur Bedeutung der additiven Kürzungsregel in der Intervallrechnung und in quasilinearen Räumen

Herausgeber: Karl Nickel
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg i. Br.
Hermann-Herder-Straße 10
D-7800 Freiburg i. Br.
West Germany
Telefon (0761) 203 3062

ÜBER DIE INTERVALLARITHMETISCHE BERECHNUNG DES WERTEBEREICHS EINER FUNKTION MIT ANWENDUNGEN*

N.Dimitrova, S.Markov

Zusammenfassung - Abstract

In der vorliegenden Arbeit wird ein Satz zur intervall-arithmetischen Berechnung des Wertebereichs

$$\left\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\right\}$$

einer monotonen Funktion auf $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ formuliert und nachgewiesen, wobei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ reelle kompakte Intervalle sind. Es wird eine Anwendung dieses Satzes auf die Bestimmung der Nullstellen von quadratischen Gleichungen mit ungenauen Koeffizienten gemacht.

A theorem allowing for the interval arithmetic computation of sets of the form

$$\left\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\right\}$$

where $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are closed intervals, and f is monoton

---

* Herrn Professor Dr. R.Krawczyk zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

in $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ is formulated and proved in this paper. The application of this theorem is illustrated on the determination of the set of zeros of a quadratic equation with uncertain coefficients.

1. Einleitung

Die Berechnung des Wertebereichs einer Funktion f von n Veränderlichen

$$F^*(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \left\{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;:\; x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n \right\}$$

wobei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ reelle Intervalle sind, ist von großer Bedeutung für die Entwicklung numerischer Algorithmen, die ungenaue Daten verarbeiten und Rundungsfehler beachten. Eines der großen Verdienste der Intervallrechnung besteht darin, daß sie Abschätzungen für F^* liefert und manchmal auch genaue Darstellungen von F^* ermöglicht (s. [1], [3], [5]). Leider ist die genaue intervallarithmetische Berechnung von F^* nur in sehr beschränkten Fällen möglich, z.B. wenn f eine rationale Funktion ist und jede Variable im Funktionsausdruck nur einmal und in der ersten Potenz auftritt (s. [5]).

Im allgemeinen gestatten die bis jetzt bekannten intervallarithmetischen Methoden die Bestimmung nur äußerer (s. [1], [6]) oder innerer Einschließungen zu F^* (s. [2]).

Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Intervallarithmetik ermöglicht die genaue Darstellung und Berechnung von F^* für eine breite Funktionenklasse - die Klasse der monotonen Funktionen von n Veränderlichen, die von Nickel in [6] untersucht sind. Der in dieser Arbeit formulierte Intervallerweiterungssatz ist eine Verallgemeinerung der eindimensionalen Sätze

in [3]. Die Autoren hoffen, daß dieser Satz vielfache Anwendungen auf die Entwicklung von intervallarithmetischen Algorithmen finden wird.

2. Intervallarithmetik

Es sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Die Menge der abgeschlossenen reellen Intervalle der Gestalt $A = [a_1, a_2]$, $a_1 \le a_2$ wird mit $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Wir führen die folgenden Mengen ein:

$$\mathbb{I}^*(\mathbb{R}) = \left\{ [a_1, a_2] \;:\; a_1 \cdot a_2 > 0 \right\};$$

$$\mathbb{I}^0(\mathbb{R}) = \left\{ [a_1, a_2] \;:\; a_1 \cdot a_2 = 0 \right\};$$

$$\mathbb{I}_s(\mathbb{R}) = \left\{ [a_1, a_2] \;:\; a_1 = -a_2 \right\};$$

$$\mathbb{I}_d(\mathbb{R}) = \mathbb{I}_s(\mathbb{R}) \cup \mathbb{I}^0(\mathbb{R}).$$

Für ein Intervall $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ heißt $w(A) = a_2 - a_1$ die Länge von A und $\varphi(A) = (a_1 + a_2)/2$ - der Mittelpunkt von A.

Mit $[a \vee b]$ bezeichnen wir ein Intervall mit Schranken $a, b \in \mathbb{R}$, wobei nicht notwendig $a \le b$ ist. Für die Schranken eines Intervalles $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{I}_s(\mathbb{R})$ führen wir noch die Bezeichnungen a_μ und a_ν ein. Dabei kennzeichnet a_μ jene Ecke von A, die näher bei 0 liegt und a_ν die andere, also

$$[a_1, a_2] = \begin{cases} [a_\mu, a_\nu] & \text{falls } \varphi(A) > 0; \\ [a_\nu, a_\mu] & \text{falls } \varphi(A) < 0. \end{cases}$$

oder $[a_1, a_2] = [a_\mu \vee a_\nu]$.

Die Zahl

$$\sigma(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(A) > 0, \\ -1 & \text{falls } \varphi(A) < 0 \end{cases}$$

wird das Vorzeichen von $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{I}_s(\mathbb{R})$ genannt.

Es seien $A, B \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. In dieser Arbeit benutzen wir die folgenden Intervallverknüpfungen (vgl. etwa [3]):

$A + B = [a_1 + b_1\ ,\ a_2 + b_2]$;

$A - B = [(a_1 - b_1) \vee (a_2 - b_2)]$;

$$AB = \begin{cases} [(a_\mu b_\mu) \vee (a_\nu b_\nu)] & \text{falls } A, B \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{I}_s(\mathbb{R}), \\ a_1 b_1 = a_2 b_2 & \text{falls } A, B \in \mathbb{I}_s(\mathbb{R}); \end{cases}$$

$$A/B = \begin{cases} [(a_\mu / b_\mu) \vee (a_\nu / b_\nu)] & \text{falls } A \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{I}_s(\mathbb{R}), \\ & \quad B \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{I}_d(\mathbb{R}); \\ a_1 / b_1 = a_2 / b_2 & \text{falls } A, B \in \mathbb{I}_s(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Im Spezialfall $A = [\alpha, \alpha] = \alpha \in \mathbb{R}$ erhält man

$$\alpha B = \begin{cases} [(\alpha b_1) \vee (\alpha b_2)] & \text{falls } B \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{I}_s(\mathbb{R}), \\ [|\alpha| b_1, |\alpha| b_2] & \text{falls } B \in \mathbb{I}_s(\mathbb{R}); \end{cases}$$

$$\alpha / B = \begin{cases} [(\alpha / b_1) \vee (\alpha / b_2)] & \text{falls } B \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{I}_d(\mathbb{R}), \\ [|\alpha| / b_1, |\alpha| / b_2] & \text{falls } B \in \mathbb{I}_s(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Zur Abkürzung führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$-B = (-1)B$, $A \ominus B = A + (-B)$, $A \oplus B = A - (-B)$;

$A \oslash B = A(1/B)$, $A \otimes B = A / (1/B)$.

Aus [4] entnehmen wir die folgenden Relationen, die im folgenden oft benutzt werden:

<u>Lemma 1</u>. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Beziehungen:

a) $$[(\alpha + \beta) \vee (\gamma + \delta)] = \begin{cases} [\alpha \vee \gamma] + [\beta \vee \delta] & \text{falls } (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) \geq 0, \\ [\alpha \vee \gamma] \oplus [\beta \vee \delta] & \text{andernfalls}; \end{cases}$$

b) $$[(\alpha - \beta) \vee (\gamma - \delta)] = \begin{cases} [\alpha \vee \gamma] - [\beta \vee \delta] & \text{falls } (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) \geq 0, \\ [\alpha \vee \gamma] \ominus [\beta \vee \delta] & \text{andernfalls}. \end{cases}$$

Analoges gilt für die Multiplikation und Division:

<u>Lemma 2</u>. Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ gelten die Relationen:

a) $$[(\alpha\beta) \vee (\gamma\delta)] = \begin{cases} [\alpha \vee \gamma][\beta \vee \delta] & \text{falls } (|\alpha| - |\gamma|)(|\beta| - |\delta|) \geq 0, \\ [\alpha \vee \gamma] \otimes [\beta \vee \delta] & \text{andernfalls}; \end{cases}$$

b) $$[(\alpha/\beta) \vee (\gamma/\delta)] = \begin{cases} [\alpha \vee \gamma] / [\beta \vee \delta] & \text{falls } (|\alpha| - |\gamma|)(|\beta| - |\delta|) \geq 0 \\ [\alpha \vee \gamma] \oslash [\beta \vee \delta] & \text{andernfalls}. \end{cases}$$

3. Der Hauptsatz

Man betrachte $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen (komponentenweisen) Ordnungsrelation $\leq$. Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Mit $\mathbb{I}(\mathbb{D})$ bezeichne man die Menge aller Intervalle auf $\mathbb{D}$, d.h.

$$X \in \mathbb{I}(\mathbb{D}) \iff X = [\underline{x}, \bar{x}] = ([\underline{x}_i, \bar{x}_i])_{i=1}^n .$$

Es sei weiter $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion aus $\mathbb{D}$ in $\mathbb{R}$.

Aus [6] entnehmen wir die folgenden Definitionen.

<u>Definition 1.</u> Die Funktion $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ wird unbedingt partiell isoton (antiton) auf $\mathbb{D}$ genannt, wenn f stets isoton (antiton) bezüglich x_i für alle Punkte $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}$ ist.

In den beiden Fällen wird f unbedingt partiell monoton genannt.

<u>Definition 2</u>. Die Funktion $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ wird unbedingt monoton auf $\mathbb{D}$ genannt, wenn f unbedingt partiell monoton bezüglich jeder Komponente x_i für alle $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}$ ist.

Es sei $\mathcal{M}_o = \mathcal{M}_o(\mathbb{D})$ die Menge der auf $\mathbb{D}$ unbedingt monotonen Funktionen. Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{M}_o$ gibt es zwei zugehörige Indexmengen $I, J \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \cup \emptyset$ mit $I \cap J = \emptyset$ und $I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$, derart, daß f unbedingt partiell isoton ist bezüglich der Variablen x_i mit $i \in I$ und f unbedingt partiell antiton ist bezüglich der Variablen x_i mit $i \in J$.

Es sei $X = [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{I}(\mathbb{D})$. Man definiere die reellen Vektoren $u(f;X) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ und $v(f;X) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ mit

$$u_i = \begin{cases} \underline{x}_i & \text{für } i \in I, \\ \bar{x}_i & \text{für } i \in J; \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$
$$v_i = \begin{cases} \underline{x}_i & \text{für } i \in J, \\ \bar{x}_i & \text{für } i \in I. \end{cases}$$

Dann heißt die Funktion $F : \mathbb{I}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit

$$F(X) = [f(u(f;X)), f(v(f;X))] \tag{2}$$

die natürliche Intervallerweiterung zu f auf $\mathbb{D}$ (s.[6]).

Sei $f \in \mathcal{M}_o$ noch stetig, dann gilt

$$\{f(x) : x \in X\} = \left[\min_{x \in X} f(x), \max_{x \in X} f(x)\right] = F(X) \tag{3}$$

zu jedem Intervall $X \in \mathbb{I}(\mathbb{D})$.

Es wird nun die Frage gestellt, zu zwei Funktionen f und g, deren natürlichen Intervallerweiterungen bekannt sind, die natürliche Intervallerweiterung ihrer Summe $f + g$, ihrer Differenz $f - g$, ihres Produktes $f.g$ und ihres Quotienten f/g zu bestimmen. Das Problem wird für $f, g \in \mathcal{M}_o$ untersucht.

Es seien $f, g \in \mathcal{M}_o$ und $h = f + g$ gehöre auch zu $\mathcal{M}_o$. Zu h definiere man die zugehörigen Indexmengen I und J, wie auch die

? Ако $h \in \mathcal{M}_o$, [illegible] [illegible] [illegible] g [illegible]
[illegible] [illegible] $h = f * g$, ~~$f \cdot g$~~ $\in \mathcal{M}_o$ / $* \in \{+, -$ [illegible]

zu jedem Intervall $X \in \mathbb{I}(\mathbb{D})$ zugeordneten reellen Vektoren $u(h;X)$ und $v(h;X)$. Weiter bezeichne man mit C die konvexe Hülle von $u(h;X)$ und $v(h;X)$, d.h.

$$\begin{aligned} C &= \operatorname{co}\{u(h;X), v(h;X)\} \\ &= \{tu(h;X) + (1-t)v(h;X) : t \in [0, 1]\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Offensichtlich gilt $C \subset X$ zu jedem $X \in \mathbb{I}(\mathbb{D})$.

Wir betrachten die Funktionen f und g auf C und mit F(C) bzw. G(C) bezeichnen wir die natürliche Intervallerweiterung zu f bzw. g auf C. Man sieht gleich, daß

$$\begin{aligned} F(C) &= [f(u(h;X)) \vee f(v(h;X))], \\ G(C) &= [g(u(h;X)) \vee g(v(h;X))] \end{aligned} \tag{5}$$

ist. Es werden weiter die folgenden Größen eingeführt:

$$d(F(C)) = f(u(h;X)) - f(v(h;X)),$$

$$r(F(C)) = |f(u(h;X))| - |f(v(h;X))|.$$

Satz 1. a) Es seien $f, g, h = f + g \in \mathcal{M}_o$. Dann gilt für die natürliche Intervallerweiterung H zu h:

$$H(X) = \begin{cases} F(C) + G(C) & \text{falls } d(F(C)).d(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \oplus G(C) & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

wobei $X \in \mathbb{I}(\mathbb{D})$ und C nach (4) definiert ist.

b) Es seien $f, g, h = f - g \in \mathcal{M}_o$. Dann gilt für die natürliche Intervallerweiterung H zu h:

$$H(X) = \begin{cases} F(C) - G(C) & \text{falls } d(F(C)).d(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \ominus G(C) & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

wobei $X \in \mathbb{I}(\mathbb{D})$ und $C = \operatorname{co}\{u(h;X), v(h;X)\}$ ist.

c) Seien $|f|, |g|, h = f.g \in \mathcal{M}_o$, so gilt für die natürliche Intervallerweiterung H zu h:

$$H(X) = \begin{cases} F(C)G(C) & \text{falls } r(F(C)).r(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \otimes G(C) & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

wobei $X \in \mathbb{I}(\mathbb{D})$ und $C = \text{co}\left\{u(h;X)\ ,\ v(h;X)\right\}$ ist.

d) Es seien $|f|, |g|, h = f / g \in \mathcal{M}_o$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Dann gilt für die natürliche Intervallerweiterung H zu h:

$$H(X) = \begin{cases} F(C) / G(C) & \text{falls } r(F(C)), r(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \oslash G(C) & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

wobei $X \in \mathbb{I}(\mathbb{D})$ und $C = \text{co}\left\{u(h;X)\ ,\ v(h;X)\right\}$ ist.

Beweis.

Zu a). Aus (2), (5) und Lemma 1a erhält man

$$\begin{aligned} H(X) &= \left[h(u(h;X))\ ,\ h(v(h;X))\right] \\ &= \left[f(u(h;X)) + g(u(h;X))\ ,\ f(v(h;X)) + g(v(h;X))\right] \\ &= \begin{cases} \left[f(u(h;X)) \vee f(v(h;X))\right] + \left[g(u(h;X)) \vee g(v(h;X))\right] \\ \quad \text{falls } (f(u(h;X)) - f(v(h;X)))(g(u(h;X)) - g(v(h;X))) \geq 0 \\ \left[f(u(h;X)) \vee f(v(h;X))\right] \oplus \left[g(u(h;X)) \vee g(v(h;X))\right] \\ \qquad\qquad \text{andernfalls;} \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(C) + G(C) & \text{falls } d(F(C))d(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \oplus G(C) & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zu b). Der Beweis ergibt sich aus Lemma 1b.

Zu c). Mit Hilfe von Lemma 2a erhält man die Gleichungskette

$$\begin{aligned} H(X) &= \left[h(u(h;X))\ ,\ h(v(h;X))\right] \\ &= \left[f(u(h;X))g(u(h;X))\ ,\ f(v(h;X))g(v(h;X))\right] \\ &= \begin{cases} \left[f(u(h;X)) \vee f(v(h;X))\right]\left[g(u(h;X)) \vee g(v(h;X))\right] \quad \text{falls} \\ \quad (|f(u(h;X))| - |f(v(h;X))|)(|g(u(h;X))| - |g(v(h;X))|) \geq 0 \\ \left[f(u(h;X)) \vee f(v(h;X))\right] \otimes \left[g(u(h;X)) \vee g(v(h;X))\right] \\ \qquad\qquad \text{andernfalls;} \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(C)G(C) & \text{falls } r(F(C))r(G(C)) \geq 0, \\ F(C) \otimes G(C) & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zu d). Der Beweis folgt aus Lemma 2b.

Der Satz ist nachgewiesen.

Bemerkungen.

1. Selbstverständlich kann man eine kompakte Formulierung von Satz 1 angeben, in dem man mit "$*$" eine der vier arithmetischen Operationen $\{+, -, \cdot, /\}$ bezeichnet. Die vorgeschlagene Formulierung wurde der bequemeren Anwendung halber vorgezogen.

2. Wir nehmen an, $f, g \in \mathcal{M}_o$ seien noch stetig. Dann gelten für F(C) und G(C) mit $C = \text{co}\left\{u(h;X)\ ,\ v(h;X)\right\} = \left\{tu(h;X) + (1-t)v(h;X)\ :\ t \in [0,1]\right\}$; $h = f*g$, $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ die Formeln:

$$F(C) = \left\{f(tu(h;X) + (1-t)v(h;X))\ :\ t \in [0,1]\right\},$$

$$G(C) = \left\{g(tu(h;X) + (1-t)v(h;X))\ :\ t \in [0,1]\right\}.$$

Die Berechnung von $F(C)$ bzw. $G(C)$ wird auf die Bestimmung der Intervallerweiterung von f bzw. g als Funktionen einer Veränderlichen t im reellen Intervall $[0,1]$ zurückgeführt. Dazu kann man die eindimensionalen Sätze aus [3] verwenden. In Abschnitt 4 wird eine Anwendung davon gemacht.

Die Größen $d(F(C))$ und $r(F(C))$ werden in diesem Fall in folgender Weise definiert:

$$d(F(C)) = \left\{ f(tu(h;X) + (1-t)v(h;X)) \;:\; t=1 \right\} - \left\{ f(tu(h;X) + (1-t)v(h;X)) \;:\; t=0 \right\} ;$$

$$r(F(C)) = \left\{ \left| f(tu(h;X) + (1-t)v(h;X)) \right| \;:\; t=1 \right\} - \left\{ \left| f(tu(h;X) + (1-t)v(h;X)) \right| \;:\; t=0 \right\} .$$

3. In manchen Fällen stimmt die natürliche Intervallerweiterung $F(C)$ zu f auf C mit der natürlichen Intervallerweiterung F zu f auf D überein. Dies ist nämlich der Fall, wenn $u(f;X) = u(h;X)$, $v(f;X) = v(h;X)$ oder $u(f;X) = v(h;X)$, $v(f;X) = u(h;X)$. Gilt ähnliches für g, so ist dann Satz 1 eine unmittelbare Verallgemeinerung der eindimensionalen Sätze in [3].

4. Bestimmung der Lösungsmenge reeller quadratischen Gleichungen mit ungenauen Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird eine Anwendung von Satz 1 auf die Berechnung der Nullstellen von quadratischen Gleichungen mit ungenauen Koeffizienten gemacht.

Vorgelegt sei die reelle quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad , \quad p, q \in \mathbb{R} .$$

Wir nehmen an, die Koeffizienten p und q seien nicht genau, sondern nur innerhalb gewisser Schranken bekannt, d.h. $p \in P$, $q \in Q$, wobei P, Q aus $I(\mathbb{R})$ seien. Gesucht wird die Menge der reellen Nullstellen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, d.h. die Menge

$$\left\{ x \;:\; x^2 + px + q = 0 \;,\; p \in P \,,\; q \in Q \right\} . \tag{6}$$

Wir setzen voraus, P und Q seien so gewählt, daß $p^2 - 4q > 0$ ist für beliebige und festgelegte $p \in P$ und $q \in Q$. Mit $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ bezeichnen wir dann die reellen Wurzeln der entsprechenden quadratischen Gleichung:

$$x^{(1)} = x^{(1)}(p,q) = (1/2)(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\,) .$$

$$x^{(2)} = x^{(2)}(p,q) = (1/2)(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\,) .$$

Die Lösungsmenge (6) zerfällt also in zwei Lösungsintervalle

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= X^{(1)}(P,Q) = \left\{ x^{(1)}(p,q) \;:\; p \in P \,,\; q \in Q \right\} , \\ X^{(2)} &= X^{(2)}(P,Q) = \left\{ x^{(2)}(p,q) \;:\; p \in P \,,\; q \in Q \right\} . \end{aligned} \tag{7}$$

Die Funktionen $x^{(1)}$ und $x^{(2)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sind unbedingt monoton auf $D = P \times Q$ mit $P, Q \in I^*(\mathbb{R})$, d.h. $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathcal{M}_o$. Da $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ noch stetig sind, so kann man $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ als natürliche Intervallerweiterungen zu $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ betrachten.

Es handelt sich also um die Berechnung der natürlichen Intervallerweiterungen zu $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$.

Für ein Intervall $X = [x_1, x_2] \in I(\mathbb{R})$ mit $x_1 \geq 0$ setzt man $\sqrt{X} = \left[\sqrt{x_1} \,,\, \sqrt{x_2} \right]$.

Es bedeutet wie üblich $P^2 = PP$.

<u>Satz 2</u>. Es seien $P = [p_1, p_2]$, $Q = [q_1, q_2] \in I^*(R)$ so gewählt, daß $p^2 - 4q > 0$ für alle $p \in P$ und $q \in Q$ ist. Dann gelten für die Lösungsintervalle $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ die folgenden Intervallformeln:

1. $Q<0$.

1.1. $P>0$.

$$X^{(1)} = \begin{cases} (1/2)(-P + \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{falls } w(P^2) \le w(4Q), \\ (1/2)(-P \oplus \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{andernfalls;} \end{cases}$$

$$X^{(2)} = (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,).$$

1.2. $P<0$.

$$X^{(1)} = (1/2)(-P + \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,);$$

$$X^{(2)} = \begin{cases} (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{falls } w(P^2) \le w(4Q), \\ (1/2)(-P - \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

2. $Q>0$.

2.1. $P>0$.

$$X^{(1)} = (1/2)(-P \oplus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,);$$

$$X^{(2)} = (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,).$$

2.2. $P<0$.

$$X^{(1)} = (1/2)(-P + \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,);$$

$$X^{(2)} = (1/2)(-P - \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,).$$

<u>Beweis.</u> Man setze $f(p, q) = -(1/2)p$, $g(p, q) = (1/2)\sqrt{p^2 - 4q}$. Daraus folgt $x^{(1)} = f + g$, $x^{(2)} = f - g$. Weil $f, g, x^{(1)}, x^{(2)}$ unbedingt monoton und stetig sind, so kann man zur Berechnung von $X^{(1)}$ bzw. $X^{(2)}$ Satz 1, a) bzw. b) und Bemerkung 2 verwenden.

Da nach Voraussetzung $p^2 - 4q > 0$ für alle $p \in P$, $q \in Q$ ist, so existieren dann die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x^{(i)}}{\partial p}, \quad \frac{\partial x^{(i)}}{\partial q}, \quad i = 1, 2.$$

Man erhält die Ausdrücke

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial p} = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2\sqrt{p^2 - 4q}} \begin{cases} > 0 & \text{falls } Q>0, P>0; \\ < 0 & \text{falls } Q>0, P<0 \\ & \text{oder } Q<0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial q} = \frac{-1}{\sqrt{p^2 - 4q}} < 0.$$

$$\frac{\partial x^{(2)}}{\partial p} = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2\sqrt{p^2 - 4q}} \begin{cases} > 0 & \text{falls } Q>0, P<0; \\ < 0 & \text{falls } Q>0, P>0 \\ & \text{oder } Q<0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial x^{(2)}}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} > 0.$$

Dann werden die reellen Vektoren $u(x^{(1)};D)$, $v(x^{(1)};D)$, $u(x^{(2)};D)$, $v(x^{(2)};D)$ in folgender Weise bestimmt:

$$u(x^{(1)};D) = \begin{cases} (p_1, q_2) & \text{falls } Q>0, P>0, \\ (p_2, q_2) & \text{falls } Q>0, P<0 \\ & \text{oder } Q<0; \end{cases}$$

$$v(x^{(1)};D) = \begin{cases} (p_2, q_1) & \text{falls } Q>0, P>0, \\ (p_1, q_1) & \text{falls } Q>0, P<0 \\ & \text{oder } Q<0; \end{cases}$$

$$u(x^{(2)};D) = \begin{cases} (p_1, q_1) & \text{falls } Q>0, P<0, \\ (p_2, q_1) & \text{falls } Q>0, P>0 \\ & \text{oder } Q<0; \end{cases}$$

$$v(x^{(2)};D) = \begin{cases} (p_2, q_2) & \text{falls } Q>0, P<0, \\ (p_1, q_2) & \text{falls } Q>0, P>0 \\ & \text{oder } Q<0. \end{cases}$$

Mit C_1 bzw. C_2 bezeichnen wir die konvexe Hülle der Vektoren $u(x^{(1)};D)$, $v(x^{(1)};D)$ bzw. $u(x^{(2)};D)$, $v(x^{(2)};D)$, d.h.

$$C_1 = \mathrm{co}\left\{u(x^{(1)};D)\ ,\ v(x^{(1)};D)\right\}$$
$$= \left\{tu(x^{(1)};D) + (1-t)v(x^{(1)};D)\ :\ t \in [0,1]\right\};$$

$$C_2 = \mathrm{co}\left\{u(x^{(2)};D)\ ,\ v(x^{(2)};D)\right\}$$
$$= \left\{tu(x^{(2)};D) + (1-t)v(x^{(2)};D)\ :\ t \in [0,1]\right\}.$$

Zur Abkürzung wird $T = [0,1]$ gesetzt.

Wir betrachten die einzelnen Fälle.

Zu 1. Es gelten für C_1 und C_2 die Beziehungen:

$$C_1 = \mathrm{co}\left\{(p_2, q_2)\ ,\ (p_1, q_1)\right\}$$
$$= \left\{t(p_2, q_2) + (1-t)(p_1, q_1)\ :\ t \in T\right\}$$
$$= \left\{(p, q) : p = p_1 + (p_2 - p_1)t\ ,\ q = q_1 + (q_2 - q_1)t\ ,\ t \in T\right\};$$

$$C_2 = \mathrm{co}\left\{(p_2, q_1)\ ,\ (p_1, q_2)\right\}$$
$$= \left\{t(p_2, q_1) + (1-t)(p_1, q_2)\ :\ t \in T\right\}$$
$$= \left\{(p, q) : p = p_1 + (p_2 - p_1)t\ ,\ q = q_2 + (q_1 - q_2)t\ ,\ t \in T\right\}.$$

Um Satz 1 anwenden zu können, sollen wir $F(C_1)$, $G(C_1)$, $F(C_2)$, $G(C_2)$ berechnen (s. Bemerkung 2). Anschließend werden die entsprechenden Berechnungen durchgefürt.

$$F(C_1) = -(1/2)P\ ;$$

$$G(C_1) = \left\{(1/2)\sqrt{p^2 - 4q}\ :\ p = p_1 + (p_2 - p_1)t\ ,\ q = q_1 + (q_2 - q_1)t\ ,\ t \in T\right\}$$

$$= \left\{(1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)}\ :\ t \in T\right\}$$

$$= \begin{cases} (1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)T)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)T)} & \text{falls } P > 0, \\ (1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)T)^2 \ominus 4(q_1 + (q_2 - q_1)T)} & \text{falls } P < 0; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2)\sqrt{P^2 - 4Q} & \text{falls } P > 0, \\ (1/2)\sqrt{P^2 \ominus 4Q} & \text{falls } P < 0. \end{cases}$$

$$F(C_2) = -(1/2)P;$$

$$G(C_2) = \left\{ (1/2)\sqrt{p^2 - 4q} \;:\; p = p_1 + (p_2 - p_1)t \;, \quad q = q_2 + (q_1 - q_2)t \;, \quad t \in T \right\}$$

$$= \left\{ (1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 - 4(q_2 + (q_1 - q_2)t)} \;:\; t \in T \right\}$$

$$= \begin{cases} (1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)T)^2 \ominus 4(q_2 + (q_1 - q_2)T)} & \text{falls } P > 0, \\ (1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)T)^2 - 4(q_2 + (q_1 - q_2)T)} & \text{falls } P < 0; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2)\sqrt{P^2 \ominus 4Q} & \text{falls } P > 0, \\ (1/2)\sqrt{P^2 - 4Q} & \text{falls } P < 0. \end{cases}$$

Es sei zunächst $P > 0$. Wende man Satz 1a bzw. Satz 1b auf die Funktionen $x^{(1)}$ bzw. $x^{(2)}$ an, so erhält man für ihre na-

türlichen Intervallerweterungen $X^{(1)}$ bzw. $X^{(2)}$ die Ausdrücke:

$$X^{(1)} = \begin{cases} (1/2)(-P + \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{falls } d(F(C_1))d(G(C_1)) \geq 0, \\ (1/2)(-P \oplus \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{andernfalls;} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2)(-P + \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{falls } d(G(C_1)) \leq 0, \\ (1/2)(-P \oplus \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{andernfalls;} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2)(-P + \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{falls } w(P^2) \leq w(4Q), \\ (1/2)(-P \oplus \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichung wird die Beziehung $d(F(C_1)) \leq 0$ benutzt, und von der zweiten zur dritten Gleichung - die Äquivalenz $d(G(C_1)) \leq 0 \iff w(P^2) \leq w(4Q)$.

$$X^{(2)} = \begin{cases} (1/2)(-P - \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{falls } d(F(C_2))d(G(C_2)) \geq 0, \\ (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{andernfalls;} \end{cases}$$

$$= (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,),$$

da in diesem Fall $d(F(C_2)) \leq 0$ und $d(G(C_2)) \geq 0$ gilt.

Sei $P < 0$, so erhält man für $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ die Formeln:

$$x^{(1)} = \begin{cases} (1/2)(-P + \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{falls } d(F(C_1))d(G(C_1)) \geq 0, \\ (1/2)(-P \oplus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{andernfalls;} \end{cases}$$

$$= (1/2)(-P + \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,).$$

$$x^{(2)} = \begin{cases} (1/2)(-P - \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{falls } d(F(C_2))d(G(C_2)) \geq 0, \\ (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{andernfalls;} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2)(-P - \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{falls } d(G(C_2)) \leq 0, \\ (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{andernfalls;} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2)(-P - \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{falls } w(P^2) \geq w(4Q), \\ (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 - 4Q}\,) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

<u>Zu 2</u>. Für die konvexen Hüllen C_1 und C_2 gilt Folgendes:

$$C_1 = \begin{cases} \mathrm{co}\left\{(p_1, q_2) \;,\; (p_2, q_1)\right\} & \text{falls } P > 0, \\ \mathrm{co}\left\{(p_2, q_2) \;,\; (p_1, q_1)\right\} & \text{falls } P < 0; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left\{(p, q) : p = p_1 + (p_2 - p_1)t \;,\; q = q_2 + (q_1 - q_2)t \;,\; t \in T\right\} \\ \qquad \text{falls } P > 0, \\ \left\{(p, q) : p = p_2 + (p_1 - p_2)t \;,\; q = q_2 + (q_1 - q_2)t \;,\; t \in T\right\} \\ \qquad \text{falls } P < 0. \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} \mathrm{co}\left\{(p_2, q_1) \;,\; (p_1, q_2)\right\} & \text{falls } P > 0, \\ \mathrm{co}\left\{(p_1, q_1) \;,\; (p_2, q_2)\right\} & \text{falls } P < 0; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left\{(p, q) : p = p_2 + (p_1 - p_2)t \;,\; q = q_1 + (q_2 - q_1)t \;,\; t \in T\right\} \\ \qquad \text{falls } P > 0 \\ \left\{(p, q) : p = p_1 + (p_2 - p_1)t \;,\; q = q_1 + (q_2 - q_1)t \;,\; t \in T\right\} \\ \qquad \text{falls } P < 0. \end{cases}$$

Nun lassen sich die natürlichen Intervallerweiterungen $F(C_1)$, $F(C_2)$, $G(C_1)$ und $G(C_2)$ leicht berechnen:

$F(C_1) = F(C_2) = -(1/2)P$;

$G(C_1) =$

$$\begin{cases} \left\{(1/2)\sqrt{p^2 - 4q} : p = p_1 + (p_2 - p_1)t \;,\; q = q_2 + (q_1 - q_2)t \;,\; t \in T\right\} \\ \qquad \text{falls } P > 0, \\ \left\{(1/2)\sqrt{p^2 - 4q} : p = p_2 + (p_1 - p_2)t \;,\; q = q_2 + (q_1 - q_2)t \;,\; t \in T\right\} \\ \qquad \text{falls } P < 0; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left\{(1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 - 4(q_2 + (q_1 - q_2)t)} \; : \; t \in T\right\} & \text{falls } P > 0, \\ \left\{(1/2)\sqrt{(p_2 + (p_1 - p_2)t)^2 - 4(q_2 + (q_1 - q_2)t)} \; : \; t \in T\right\} & \text{falls } P < 0; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)T)^2 \ominus 4(q_2 + (q_1 - q_2)T)} & \text{falls } P > 0, \\ (1/2)\sqrt{(p_2 + (p_1 - p_2)T)^2 \ominus 4(q_2 + (q_1 - q_2)T)} & \text{falls } P < 0; \end{cases}$$

$$= (1/2)\sqrt{P^2 \ominus 4Q} \; .$$

$G(C_2) =$

$$\begin{cases} \left\{(1/2)\sqrt{p^2 - 4q} \; : \; p = p_2 + (p_1 - p_2)t \; , \; q = q_1 + (q_2 - q_1)t \; , \; t \in T\right\} & \text{falls } P > 0, \\ \left\{(1/2)\sqrt{p^2 - 4q} \; : \; p = p_1 + (p_2 - p_1)t \; , \; q = q_1 + (q_2 - q_1)t \; , \; t \in T\right\} & \text{falls } P < 0; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left\{(1/2)\sqrt{(p_2 + (p_1 - p_2)t)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)} \; : \; t \in T\right\} & \text{falls } P > 0, \\ \left\{(1/2)\sqrt{(p_1 + (p_2 - p_1)t)^2 - 4(q_1 + (q_2 - q_1)t)} \; : \; t \in T\right\} & \text{falls } P < 0 \end{cases}$$

$$= (1/2)\sqrt{P^2 \ominus 4Q} \; .$$

Unter Verwendung von Satz 1 erhält man schließlich für $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$:

$$x^{(1)} = \begin{cases} (1/2)(-P + \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{falls } d(F(C_1))d(G(C_1)) \geq 0, \\ (1/2)(-P \oplus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{andernfalls;} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2)(-P + \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{falls } P < 0, \\ (1/2)(-P \oplus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{falls } P > 0. \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{cases} (1/2)(-P - \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{falls } d(F(C_2))d(G(C_2)) \geq 0, \\ (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{andernfalls;} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1/2)(-P - \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{falls } P < 0, \\ (1/2)(-P \ominus \sqrt{P^2 \ominus 4Q}\,) & \text{falls } P > 0. \end{cases}$$

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

1. Krawczyk, R., Interval Extensions and Interval Iterations, Computing 24, 119-129 (1980).
2. Krawczyk, R., Zur äußeren und inneren Einschließung des Wertebereichs einer Funktion, Freiburger Intervall - Berichte 80/7, 1-19.
3. Markov, S., Some Applications of Extended Interval Arithmetic to Interval Iterations, Computing, Suppl. 2, 69-84 (19
4. Markov, S. , N.Dimitrowa, Rechengesetze der erweiterten Intervallarithmetik, Freiburger Intervall - Berichte, 79/10
5. Moore, R.E., Interval Analysis, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall Inc. (1966).
6. Nickel, K., Die Überschätzung des Wertebereichs einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendung auf lineare Gleichungssysteme, Computing 18, 15-36 (1977).

Anschrift der Verfasser

Prof.Dr. S.M. Markov, N. Dimitrova

Mathematics Institute
Bulg. Academie of Science
P.O. Box 373
BG - Sofia/Bulgarien